T O P O L O G I A
WPPT I, sem. letni

EGZAMIN I
A

Wrocław, 25 czerwca 2007

ZADANIE 1.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $f : X \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją rzeczywistą określoną na X.
a) Sprawdź, czy
$$d'(x, y) = \max\{d(x, y), |f(x) - f(y)|\}$$
jest metryką na X?
b) Udowdodnij coś o funkcji f w tej metryce?

ROZWIĄZANIE: a) Tak, jest to metryka, bo:
1. Jeśli $x = y$ to $d'(x, y) = \max\{0, 0\} = 0$, jeśli zaś $x \neq y$, to już samo $d(x, y)$ jest większe od zera, a tym bardziej $d'(x, y)$.
2. Oczywiście $d'(x, y) = d'(y, x)$.
3. $d'(x, y) + d'(y, z) = \max\{d(x, y), |f(x) - f(y)|\} + \max\{d(y, z), |f(y) - f(z)|\} \geq \max\{d(x, y) + d(y, z), |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)|\} \geq \max\{d(x, z), |f(x) - f(z)|\} = d'(x, z)$.

b) f jest ciągła, a nawet Lipschitzowska (ze stałą1) w tej metryce, bo $d'(x, y) \geq |f(x) - f(y)|$.

ZADANIE 2.
a) Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem w przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d) spełniającym warunek
$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0.$$
Czy ciąg ten musi być zbieżny?

ROZWIĄZANIE: Nie. Niech na przykład $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Wiadomo, że $a_n \to \infty$, więc w przestrzeni zupełnej $\mathbb{R}$ ciąg ten jest rozbieżny, mimo że
$$d(a_n, a_{n+1}) = |a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

b) To samo pytanie przy warunku
$$\sum_{n=1}^{\infty} d(a_n, a_{n+1}) < \infty.$$

ROZWIĄZANIE: A, tu sytuacja się zmienia. Odpowiedź jest TAK. Niech $n < m$. Z wielokrotnego złożenia warunku trójkąta mamy
$$d(a_n, a_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} d(a_k, a_{k+1}),$$

a to, jako „ogon” szeregu zbieżnego, dąży po n do zera. Zatem $d(a_n, a_m) < \epsilon$, o ile tylko n (a więc i m) są większe od pewnego n_0. Zatem nasz ciąg jest podstawowy, a z zupełności przetrzeni – zbieżny.

ZADANIE 3.
Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego

$a_1 = \ln 2$,

$a_{n+1} = \frac{1}{a_n+2}$.

ROZWIĄZANIE: Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x+2}$. Oczywiście $x \geq 0 \implies f(x) > 0$, zatem f można obciąć do półprostej $X = [0, \infty)$ i będziemy mieli $f : X \to X$. Taka przestrzeń X jest oczywiście zupełna. Obliczmy pochodną: $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$, a to dla $x \geq 0$ jest mniejsze równe od $\frac{1}{4}$. A więc f jest Lipschitzowska ze stałą $\frac{1}{4}$, czyli zbliżająca. Ponieważ punkt startowy $\ln 2$ jest w X, więc nasz ciąg, jako ciąg iteracji, będzie zbieżny do jedynego punktu stałego. Aby go znaleźć rozwiązujemy równanie $x = \frac{1}{x+2}$. Wychodzą dwa rozwiązania: $x_0 = \sqrt{2} - 1$ i $x_1 = -\sqrt{2} - 1$. Tylko x_0 jet nieujemne, czyli należy do $X = [0, \infty)$, więc nasz ciąg zbiega do niego. Odpowiedź: szukana ganica, to $\sqrt{2} - 1$.
UWAGA: na całym $\mathbb{R}$ odwzorowanie f nie jest ani dobrze określone (w -2), ani zbliżające – w otoczeniu punktu -2 pochodna jest duża, zresztą wychodzą dwa punkty stałe. Zatem ograniczenie dziedziny jest koniecznością.

ZADANIE 4.
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną i niech A, B będą podzbiorami X, przy czym A jest rezydualny. Czy B jest na pewno rezydualny, jeśli istnieje
a) homeomorfizm $\phi : A \to B$ (jako przestrzeni metrycznych z metryką d)?
b) homeomorfizm $\psi : X \to X$ taki, że $\psi(A) = B$?
(przy odpowiedziach pozytywnych podaj dowody, przy negatywnych - kontrprzykłady)

ROZWIĄZANIE: a) Nie. Weźmy $X = [0, \infty)$ i $A = [0, \infty)$, $B = [1, \infty)$. A i B są homeomorficzne, A jest oczywiście rezydualny w X, a B nawet nie jest gęsty w X.
b) Tak. Homeomorfizm X w X zachowuje gęstość podzbioru i jego typ G_δ.

ZADANIE 5.
Niech A będzie podzbiorem I kategorii prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Udowodnij, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ translacja $A+x = \{a+x : a \in A\}$ zbioru A jest rozłączna ze zbiorem liczb wymiernych.

ROZWIĄZANIE: Załóżmy, że to nie prawda. Wtedy dla każdego x istniałoby $a \in A$ takie, że $a+x = q \in Q$, czyli $a-q = -x$. Zapiszmy to z kwantyfikatorami:

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \exists_{a\in A} \ \exists_{q\in Q} \ \ a-q = -x.$$

Kwantyfikatory szczegółowe można przestawić i zamienić na sumy zbiorów. Suma po $a \in A$ punktów $a-q$ daje translację $A-q$ zbioru A. Zatem piszemy

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \bigcup_{q\in Q} A-q \ni -x.$$

Ponieważ $-x$ przebiega cały zbór $\mathbb{R}$, więc dostaliśmy

$$\bigcup_{q\in Q} A-q = \mathbb{R}.$$

Jest to sprzeczność z twierdzeniem Baire'a, bowiem:

(1) każda translacja jest homeomorfizmem całej prostej na siebie, zatem translacja $A-q$ zbioru I kategorii jest zbiorem I kategorii,

(2) suma indeksowana liczbami wymiernymi jest przeliczalna, zatem cała suma jest też zbiorem I kategorii,

(3) $\mathbb{R}$ jest przestrzenią mertyczną zupełną, więc nie jest I kategorii.

Tomasz Downarowicz